مفهوم التكامل (المحاضرة الأولى)

التكامل هو عملية معاكسة لعملية الاشتقاق، ويرمز له بالرمز $\int$ وان الرمز

$\int ......dx$ يعني التكامل بالنسبة الى x

$\int ......dy$ يعني التكامل بالنسبة الى y

قواعد التكامل غير المحدد

اولاً: تكامل دالة الثابت:

$$\int a\,dx = ax + c$$

حيث ان c يمثل ثابت التكامل.

مثال: اوجد قيمة التكامل التالي:

1. $\int 6\,dx = 6x + c$
2. $\int -dx = -x + c$

ثانياً: تكامل الدالة:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

حيث ان c يمثل ثابت التكامل.

مثال: اوجد قيمة كل من التكاملات التالية:

1. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$
2. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$

ثالثاً: التخلص من الأقواس اذا كانت الأقواس ليس لها اس

مثال: جد التكامل التالي:

$$1. \int (2x+5)(x+1)dx = \int (2x^2+2x+5x+5)dx$$
$$= \int (2x^2+7x+5)dx = \int 2x^2 dx + \int 7x\,dx + \int 5dx$$
$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 5x$$

رابعاً: اذا كان احد الأقواس مرفوع الى اس وكان القوس الثاني هو مشتقة داخل القوس الأول، فإننا نكامل القوس الأول فقط ونقسم على الاس الجديد ونضيف ثابت c

مثال: اوجد قيمة التكامل التالي:

$$\int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)}dx = \frac{1}{2}\int (x^2-4x+5)^{-2}(2x-4)dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2-4x+5)^{-1}}{-1} + c$$

خامساً: تكامل دالة الجيب هو:

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$$

ان الحالة لهذه القاعدة هي:

$$\int \sin^n(ax)dx = -\frac{\sin^{n-1}(ax)\cos(ax)}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(ax)dx \quad for\ n \succ 0$$
$$a \neq 0$$

واذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا:

$$\int u' \sin(u)dx = -\cos(u) + c$$

سادساً: تكامل دالة الجيب تمام هو:

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$$

ان الحالة لهذه القاعدة هي:

$$\int \cos^n(ax)dx = -\frac{\cos^{n-1}(ax)\sin(ax)}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(ax)dx \quad for\ n \succ 0$$
$$a \neq 0$$

واذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا:

$$\int u' \cos(u)dx = \sin(u) + c$$

سابعاً: تكامل دالة الظل هو:

$$\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| + c$$

ان الحالة لهذه القاعدة هي:

$$\int \tan^n(ax)dx = -\frac{1}{a(n-1)}\tan^{n-1}(ax) - \int \tan^{n-2}(ax)dx \quad for\ n \neq 1$$

$$a \neq 0$$

ثامناً: تكامل دالة القاطع هو:

$$\int \sec(x)dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + c$$

ان الحالة لهذه القاعدة هي:

$$\int \sec^n(ax)dx = \frac{\sec^{n-2}(ax)\tan(ax)}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(ax)dx \quad for\ n \neq 1$$

$$a \neq 0$$

تاسعاً: تكامل دالة القاطع تمام هو:

$$\int \csc(x)dx = -\ln|\csc(x) + \cot(x)| + c$$

ان الحالة لهذه القاعدة هي:

$$\int \csc^n(ax)dx = -\frac{\csc^{n-1}(ax)\cos(ax)}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}(ax)dx \quad for\ n \neq 0$$

$$a \neq 0$$

تاسعاً: تكامل الدالة الأسية هو:

$$\int e^{cx}dx = \frac{1}{c}e^{cx} + a \qquad c \neq 0$$

$$\int a^{cx}dx = \frac{1}{c}\frac{1}{\ln(a)} + a^{cx} + d \qquad c \neq 0\ a \succ 0, a \neq 1$$

عاشراً: تكامل الدالة اللوغاريتمية هو:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + c$$

$$\int \log_b(x)dx = x\log_b(x) - x\log_b e + c$$

مجموعة من الأمثلة حول القواعد السابقة (المحاضرة الثانية)

مثال: اوجد قيمة كل من التكاملات التالية:

$$1.\int \sin(4x)dx = -\frac{1}{4}\cos(4x)+c$$

$$2.\int x\tan(2x^2+1)dx = \frac{1}{4}\int 4x\tan(2x^2+1)dx = \frac{1}{4}\ln\left|\sec(2x^2+1\right|+c$$

$$3.\int \cot(7-\frac{x}{2})dx = -2\int -\frac{1}{2}\cot(7-\frac{x}{2})dx = 2\ln\left|\csc(7-\frac{x}{2})\right|+c$$

تكامل دالة الجيب العكسية هو:

$$\int \arcsin(x)dx = x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+c$$

$$\int \arcsin(\frac{x}{a})dx = x\arcsin(\frac{x}{a})+\sqrt{a^2-x^2}+c$$

تكامل دالة الجيب تمام العكسية هو:

$$\int \arccos(x)dx = x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}+c$$

$$\int \arccos(\frac{x}{a})dx = x\arccos(\frac{x}{a})-\sqrt{a^2-x^2}+c$$

تكامل دالة الظل العكسية هو:

$$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

$$\int \arctan(\frac{x}{a})dx = x\arctan(\frac{x}{a})-\frac{a}{2}\ln(1+\frac{x^2}{a^2})+c$$

تكامل دالة الظل تمام العكسية هو:

$$\int \text{arccot}(x)dx = x\,\text{arccot}(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

$$\int \text{arccot}(\frac{x}{a})dx = x\,\text{arccot}(\frac{x}{a})+\frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)+c$$

عاشراً: تكامل دالة القاطع العكسية هو:

$$\int \operatorname{arcsec}(x)\,dx = x\ \operatorname{arcsec}(x) - \ln\left|x + x\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right| + c$$

$$\int \operatorname{arcsec}(\frac{x}{a})\,dx = x\ \operatorname{arcsec}(\frac{x}{a}) + \frac{x}{a|x|}\ln\left|x \pm x\sqrt{x^2-1}\right| + c$$

تكامل دالة الجيب الزائدية هو:

$$\int \sinh(ax)\,dx = \frac{1}{a}\cosh(ax) + c$$

$$\int \sinh^n(ax)\,dx = \frac{1}{an}\sinh^{n-1}(ax)\cosh(ax) - \frac{n-1}{n}\int \sinh^{n-2}(ax)\,dx + c \quad n \succ 0$$

تكامل دالة الجيب تمام الزائدية هو:

$$\int \cosh(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sinh(ax) + c$$

$$\int \cosh^n(ax)\,dx = \frac{1}{an}\sinh(ax)\cosh^{n-1}(ax) + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2}(ax)\,dx + c \quad n \succ 0$$

تكامل دالة الظل الزائدية هو:

$$\int \tanh(ax)\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\cosh(ax)\right| + c$$

$$\int \tanh^n(ax)\,dx = -\frac{1}{a(n-1)}\tanh^{n-1}(ax) + \int \tanh^{n-2}(ax)\,dx + c \quad n \neq 1$$

تكامل دالة الظل تمام الزائدية هو:

$$\int \coth(ax)\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\sinh(ax)\right| + c$$

$$\int \coth^n(ax)\,dx = -\frac{1}{a(n-1)}\coth^{n-1}(ax) + \int \coth^{n-2}(ax)\,dx + c \quad n \neq 1$$

تكامل دالة الجيب الزائدية العكسية هو:

$$\int arc\ \sinh(\frac{x}{a})\,dx = x\ \operatorname{arcsinh}(\frac{x}{a}) - \sqrt{x^2+a^2} + c$$

تكامل دالة الجيب تمام الزائدية العكسية هو:

$$\int \operatorname{arccosh}(\frac{x}{a})\,dx = x\ \operatorname{arccosh}(\frac{x}{a}) - \sqrt{x^2-a^2} + c$$

تكامل دالة الظل الزائدية العكسية هو:

$$\int \operatorname{arctanh}(\frac{x}{a})dx = x \operatorname{arctanh}(\frac{x}{a}) + \frac{a}{2}\ln\left|a^{2} - x^{2}\right| + c \quad |x| \prec |a|$$

تكامل دالة الظل تمام الزائدية العكسية هو:

$$\int \operatorname{arctanh}(\frac{x}{a})dx = x \operatorname{arctanh}(\frac{x}{a}) + \frac{a}{2}\ln\left|x^{2} - a^{2}\right| + c \quad |x| \succ |a|$$

تكامل دالة القاطع الزائدية العكسية هو:

$$\int \operatorname{arcsech}(\frac{x}{a})dx = x \operatorname{arcsech}(\frac{x}{a}) - a \arctan\frac{x\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}}{x-a} + c \quad x \in (0,a)$$

تكامل دالة القاطع تمام الزائدية العكسية هو:

$$\int \operatorname{arccsch}(\frac{x}{a})dx = x \operatorname{arccsch}(\frac{x}{a}) - a \ln\frac{x+\sqrt{x^{2}+a^{2}}}{a} + c \quad x \in (0,a)$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u^{2}+a^{2}}}dx = Sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u^{2}-a^{2}}}dx = Cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{u'}{a^{2}-u^{2}}dx = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{u'}{u\sqrt{u^{2}+a^{2}}}dx = -\frac{1}{a}Sech^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{u'}{|u|\sqrt{a^{2}-u^{2}}}dx = -\frac{1}{a}Csch^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

(المحاضرة الثالثة)

$$\int \frac{u'}{a^2 - u^2} dx = \frac{1}{a} Coth^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2 - u^2}} dx = Sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{u'}{a^2 + u^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{u'}{u\sqrt{u^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} Sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

بعض تطبيقات التكامل الغير محدد

اذا اعطى في السؤال ميل المنحني ونقطة فإننا نكامل الميل ونضيف ثابت التكامل ثم نعوض النقطة (x,y) لإيجاد c ثم نعوض قيمة c لإيجاد معادلة المنحني

اذا اعطى في السؤال ميل المنحني وكان للمنحني نهاية عظمى أو صغرى قيمتها a في هذه الحالة نجعل الميل يساوي صفر ونجد قيمة x حيث y=a ثم نكامل الميل ونضيف ثابت التكامل ثم نعوض النقطة (x,y) لإيجاد c ثم نعوض قيمة c فى معادلة المنحنى

اذا اعطى في السؤال المشتقة الثانية في هذه الحالة نكامل مرتين.

مثال: جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x,y) من نقاطه $3x^2-2x+1$ ويمر بالنقطة (2,3)

الحل:

الميل المنحني = المشتقة منحني في تلك النقطة

$$y = \int (3x^2 - 2x + 1)dx$$

$$y = \frac{3x^2}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + c$$

$$y = x^3 - x^2 + x + c$$

النقطة (2,3) تحقق معادلة المنحني وعليه

$$3 = 8 - 4 + 2 + c$$

$$3 = 6 + c \quad \longrightarrow \quad c = 3 - 6 = -3$$

اذن معادلة المنحني $y = x^3 - x^2 + x - 3$

مثال: منحني يمر بالنقطتين (2,-3)، (-1,9) وميله عند (x,y) يساوي ax-5 جد معادلته.

$$y = \int ax - 5\, dx$$

$$y = \frac{ax^2}{2} - 5x + c$$

وض النقطتان (2 , -3) , (-1 , 9) في معادلة المنحني نحصل

$$9 = \frac{a(-1)^2}{2} - 5(-1) + c$$

$$9 = \frac{a}{2} + 5 + c \quad \Longrightarrow \quad 9 - 5 = \frac{a}{2} + c$$

$$4 = \frac{a}{2} + c \quad \Longrightarrow \quad 8 = a + 2c \quad \ldots\ldots(1)$$

$$-3 = \frac{a(2)^2}{2} - 5(2) + c$$

$$-3 = \frac{a(2)^2}{2} - 5(2) + c$$
$$-3 = \frac{4a}{2} - 10 + c$$

$-3 = 2a - 10 + c$

$-3 + 10 = 2a + c$

$7 = 2a + c$ --------(2)

$14 = 4a + 2c$ --------(2) × 2

$8 = a + 2c$ --------(1)

بالطرح

$6 = 3a \longrightarrow a = 2$

نعوض $a = 2$ في معادلة رقم 1

$8 = 2 + 2c \longrightarrow 2c = 8 - 2 \longrightarrow 2c = 6 \longrightarrow c = 3$

أذن معادلة المنحني تكون $y = x^2 - 5x + 3$

مثال3/ جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x , y) من نقاطه هي $2x - 4$ وكان للمنحني نهاية صغرى قيمتها (-3)

الحل/ بما ان للمنحني نهاية صغرى في (x , y) تساوي -3 اي ان $f'(x) = 0$

$2x - 4 = 0$

$2x = 4 \Longrightarrow x = 2 \Longrightarrow y = -3$

(2 , -3) هي التي تمثل نهاية صغرى

$y = \int 2x - 4\, dx$

$y = x^2 - 4x + c$

نعوض (2 , -3) في معادلة المنحني

$-3 = (2)^2 - 4(2) + c$

$-3 = 4 - 8 + c$

$-3 = -4 + c$

∴ معادلة المنحني $y = x^2 - 4x + 1$

التكامل المحدد (المحاضرة الرابعة)

اذا كانت f(x) دالة مستمرة في الفترة [a,b] وكانت F(x) عكس مشتقة f(x) فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

حيث ان a يمثل الحد الأدنى للتكامل و b الحد الأعلى للتكامل.

ملاحظات:

- ✓ قواعد التكامل المحدد هي نفس قواعد التكامل الغير محدد
- ✓ في التكامل المحدد لا نضيف ثابت التكامل
- ✓ بعد تكامل الدالة نعوض عن قيم b,a اي F(b)-F(a)

مثال:

اوجد قيمة كل من التكاملات التالية:

1. $$\int_1^2 (3x^2+2x-2)dx = [\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-2]_1^2 = [x^3+x^2-2]_1^2$$
$$=[2^3+2^2-2]-[1^3+1^2-2]=[8+4-4]-[1+1-2]=8$$

2. $$\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}dx = \int_0^3 (x^2+16)^{-\frac{1}{2}}2xdx = 2[(x^2+16)^{\frac{1}{2}}]_0^3$$
$$=[2\sqrt{x^2+16}]_0^3 = [2\sqrt{9+16}]-[\sqrt{(0+16}]=10-8=2$$

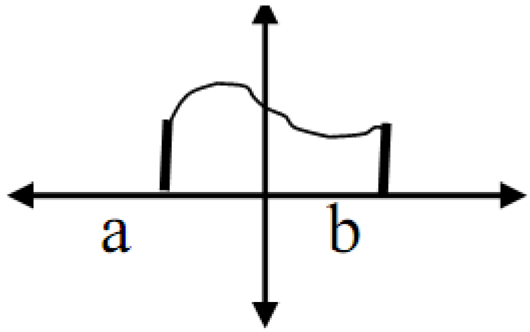
3. $$\int_4^0 x(x-1)(x-2)dx = -\int_0^4 x(x^2-2x-x+2)dx$$
$$=-[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2]_0^4 = -[\frac{4^4}{4}-4^3+4^2]+0=-[64-64+16]=-16$$

تطبيقات على التكامل المحدد

اولاً: المساحة المحددة بمنحني الدالة ومحور x

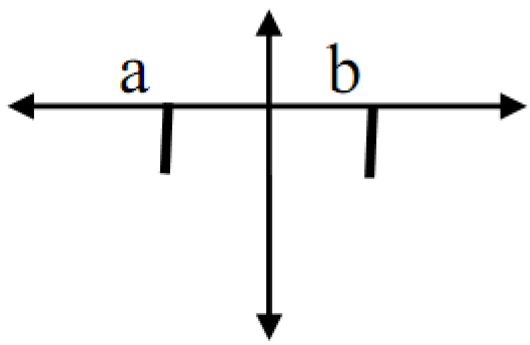
المساحة المحددة لمنحني الدالة y=f(x) ومحور x والمستقيمين x=a،x=b هي:

- عندما يكون $f(x)>0$ أي ان المنحني فوق محور x فإن المساحة المحددة بالمنحني والمستقيمين والتي يرمز لها بالرمز A هي:



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

- عندما يكون $f(x) < 0$ أي ان المنحني تحت محور x فإن المساحة المحددة بالمنحني والمستقيمين والتي يرمز لها بالرمز A هي:



$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

ملاحظات:

- ✓ لايجاد المساحة بين منحني الدالة ومحور السينات نتبع الخطوات التالية:
- ✓ نجد نقاط تقاطع المنحني ومحور السينات وذلك بتعويض عن $y=0$ بالدالة ونجد قيم x
- ✓ نلاحظ قيم x هل تجزء الفترة ام لا تجزئ
- ✓ اذا لم يعطي الفترة في السؤال نجعل قيم x هي الفترة
- ✓ نكون جدول لمعرفة المنحني هل يقع فوق ام تحت محور السينات على كل فترة.

مثال: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^2-2x-3$ ومحور السينات على الفترة [-1,3]

الحل:

نجد نقاط التقاطع مع محور السينات أي نجعل y=0 وكما يلي:

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0$$
$$x=3\ ,\ x=-1$$

الفترة	x ∈ للفترة	اشارة الدالة f(x)	الموقع
[-1,3]	X=0	سالبة	تحت

$$A=-\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx=[-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+3x]_{-1}^{3}$$
$$=[-\frac{3^3}{3}+3^2+3*3]-[-\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+3(-1)]=\frac{32}{3}unit^2$$

مثال: جد المساحة بين منحني الدالة $y=f(x)=\sqrt{(x+1)}$ ومحور السينات والمستقيمين x=3,x=0

الحل:

التقاطع مع محور السينات أي نجعل y=0

$$\sqrt{(x+1)}=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow -1 \notin [0,3]$$

الفترة	x ∈ للفترة	اشارة الدالة f(x)	الموقع
[0,3]	X=1	موجبة	فوق

$$A=\int_{0}^{3}\sqrt{x+1}dx=\int_{0}^{3}(x+1)^{\frac{1}{2}}dx=[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}]_{0}^{3}$$
$$[\frac{2}{3}\sqrt{(3+1)^3}]-[\frac{2}{3}\sqrt{(0+1)^3}]=\frac{14}{3}unit^2$$

المحاضرة الخامسة

مثال: جد المساحة المحددة بالدالة $y=f(x)=x^3-x$ ومحور السينات.

الحل:

التقاطع مع محور السينات أي نجعل $y=0$

$$x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow x=0 \; or \; x=1 \; or \; x=-1$$

اذا الفترات تصبح $[-1,0],[0,1]$

الموقع	اشارة الدالة f(x)	$x \in$ للفترة	الفترة
فوق	موجبة	X=-1/2	[-1,0]
تحت	سالبة	X=1/2	[0,1]

$$A=A_1+A_2=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}-(x^3-x)dx$$

$$=[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}]_{-1}^{0}+[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}]_{0}^{1}=\frac{1}{2}unit^2$$

مثال: جد المساحة المحددة بين منحني الدالة $y=f(x)=x^3-4x$ ومحور السينات والمستقيمين $x=2,x=-2$

تقاطع المنحني مع محور السينات وذلك بجعل y = 0

$x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow x(x^2 - 4) = 0$

$x(x-2)(x+2) = 0$

$x = 0$ or $x = 2$ or $x = -2$ [-2 , 2]

الفترات تصبح [-2 ,0] , [0 , 2]

الفترة	للفترة x	اشارة الدالة f(x)	
[-2 , 0]	x = -1	$(-1)^3 - 4(-1) = 3 > 0$	فوق
[0 , 2]	x = 1	$(1)^3 - 4(1) = -3 < 0$	تحت

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2} -(x^3 - 4x)dx$$

$$= [\frac{x^4}{4} - 2x^2]_{-2}^{0} + [-\frac{x^4}{4} + 2x^2]_{0}^{2}$$

$$= [0] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2\right] + \left[\frac{-(2)^4}{4} + 2(2)^2\right] - [0]$$

$$= -[4 - 8] + [-4 + 8] = 4 + 4 = 8unit^2$$

مثال: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y=f(x)=x^4-x^2$ ومحور السينات على الفترة [-1,1]

الحل:

$x^4 - x^2 = 0 \Longrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$

$x = 0$ or $x = 1$ or $x = -1$ [-1 , 1]

الفترات تصبح [-1 ,0] , [0 , 1]

الفترة	للفترة x	اشارة الدالة f(x)	الموقع
[-1 , 0]	$x = \frac{-1}{2}$	$(\frac{-1}{2})^4 - (\frac{-1}{2})^2 = \frac{-3}{16} < 0$	تحت
[0 , 1]	$x = \frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})^4 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{-3}{16} < 0$	تحت

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{0} -(x^4 - x^2)dx + \int_{0}^{1} -(x^4 - x^2)dx$$

$$= [-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}]_{-1}^{0} + [-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}]_{0}^{1}$$

$$= [0] - \left[-\frac{(-1)^5}{5} + \frac{(-1)^3}{3}\right] + \left[-\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3}\right] - [0] = -\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right] + \left[-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right]$$

$$= \left(-\frac{3}{15} + \frac{5}{15}\right) + \left(-\frac{3}{15} + \frac{5}{15}\right) = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$

مثال: جد المساحة المحددة بين منحني الدالتين $y=f(x)=x, y=f(x)=x^3$

الحل:

$$R(x) = f(x) - g(x)$$
$$R(x) = x - x^3$$

$$x - x^3 = 0 \Longrightarrow x(1 - x^2) = 0$$

$$x - x^3 = 0 \Longrightarrow x(1 - x^2) = 0$$

$$x(1 - x)(1 + x) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{or} \quad x = 1 \quad \text{or} \quad x = -1$$

الفترات تصبح $[-1, 0], [0, 1]$

الفترات تصبح $[-1, 0], [0, 1]$

الفترة	للفترة x	اشارة الدالة f(x)	
$[-1, 0]$	$x = -1/2$	$\frac{-1}{2} - (\frac{-1}{2})^3 = \frac{-3}{8} < 0$	تحت
$[0, 1]$	$x = 1/2$	$\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8} > 0$	فوق

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{0} -(x - x^3)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx$$

$$= [-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}]_{-1}^{0} + [\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}]_{0}^{1} = [0] - [-\frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^4}{4}] + \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4}\right] - [0]$$

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{0} -(x - x^3)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx$$

$$= [-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}]_{-1}^{0} + [\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}]_{0}^{1} = [0] - [-\frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^4}{4}] + \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4}\right] - [0]$$

$$= -\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right] = -\left(\frac{-1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} unit^2$$